一般化運動方程式

2012 年 3 月 17 日

1　イントロ

スクレロノーマスな場合の拘束条件について、一般化座標と一般化力の関係を一般化運動方程式で表現する。

2　スクレロノーマスな一般化運動方程式

「配位空間と仮想仕事の原理」で述べたとおり、一般化仕事とは

$$\mathcal{F}_i = \sum_\alpha m_\alpha \left(\ddot{\mathrm{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q_i} \right)$$

であった。

$$\frac{\mathrm{dr}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}_\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j} \frac{\mathrm{d}^2 q^j}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^k} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^q q^k}{\mathrm{d}t^q}$$

これより

$$\mathcal{F}_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j} \right) \frac{\mathrm{d}^2 q^j}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j \partial q^k} \right) \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t} \right]$$

となる。(リーマン幾何知っている人はどっかで見たような式ですね・・・)
ここで

$$m_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_\alpha}{\partial q^j} \right)$$

と置くと、これは i,j について対称行列である。
さらに、2 階の共変テンソル（の成分であることもすぐ分かる。
すなわち、

$$q_i' = a_{ij} q_j$$

の変数変換に対し

$$m'_{ij} = a^{-1}_{ik} a^{-1}_{jl} m_{jl}$$

となる。(ここでは、上付き、下付きは特に変換則を表しているわけではない。)
したがって、$m_{i,j}$ は微分幾何で言うところの計量（の成分) の資格がある。
この計量は実は運動エネルギーを図る意味での計量となっていて

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\mathrm{dr}_{\alpha}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{dr}_{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m_{ij} \frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}$$

となっている。
さらに第一種クリストッフェル記号

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^k \partial q^k}$$

を定義すると $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ と、後ろ二つについて対称で

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^j \partial q^k} + \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial^2 \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i \partial q^k} \right) = C_{ijk} + C_{jik}$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \\ \frac{\partial m_{jk}}{\partial q^i} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji} \\ &= \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} \end{aligned}$$

より

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q^i} \right)$$

を得る。
最後に、力 F_{α} がポテンシャル $U(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_N)$ によって与えられるとすると

$$\mathcal{F}_i = \sum_{\alpha} \mathrm{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} = -\sum_{\alpha} \frac{\partial U}{\partial \mathrm{r}_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathrm{r}_{\alpha}}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i}$$

以上から

$$\mathcal{F}_i = m_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{ijk} \dot{q}^j \dot{k}$$

となり、一般化運動方程式を得る。
m_{ij}, Γ_{ijk} は配位空間の幾何学的な量で、その様な量で方程式が特徴づけられているところに意味がある。(詳しくはリーマン幾何を参照)

3　二次元振り子

原点 O から長さ l の十分軽く変形しない棒の先に取り付けられた質量 m の質点の一様重力 mg 中の運動を解く。
棒から受ける張力を S とすると、普通の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\mathrm{g} + \mathrm{S}$$

となる。
拘束条件は

$$|\mathrm{r}| - l = 0$$

となる。
さて、これを上の処方箋に従って解いてみよう。
まず、

$$x = l\cos\theta$$
$$y = l\sin\theta$$

と極座標系を導入すると（自由度 1) 運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}$$

より

$$m_\theta\theta = ml^2$$

となる。よって、クリストッフェル記号は

$$\Gamma_{\theta\theta\theta} = 0$$

また、一般化力は重力ポテンシャルを $mgy = mgl\sin\theta$ とすると

$$\mathcal{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = -mgl\cos\theta$$

より一般化運動方程式は

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\cos\theta$$

(θ は x 軸から図っていることに注意)
この方程式は周期を求めるだけなら楕円積分とかでできる。
θ が十分小さいところでは良くしった振り子の式となる (x 軸から角度を測っている事に注意。)

4　三次元振り子

二次元と全く同じだが、座標系としては球座標を採用して

$$
\begin{aligned}
x &= l \sin\theta \cos\phi \\
y &= l \sin\theta \sin\phi \\
z &= l \cos\theta
\end{aligned}
$$

とする。(自由度は 2)
そうすると、

$$
\mathrm{r} = l \sin\theta \cos\phi \mathrm{e}_x + l \sin\theta \sin\phi \mathrm{e}_y + l \cos\theta \mathrm{e}_z
$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \theta} &= l \cos\theta \cos\phi \mathrm{e}_x + l \cos\theta \sin\phi \mathrm{e}_y - l \sin\theta \mathrm{e}_z \\
\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \phi} &= -l \sin\theta \sin\phi \mathrm{e}_x + l \sin\theta \cos\phi \mathrm{e}_y
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
m_{\theta\theta} &= ml^2 \\
m_{\theta\phi} &= m_{\phi\theta} = 0 \\
m_{\phi\phi} &= ml^2 \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

となり、クリストッフェル記号は

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta\theta} &= 0 \\
\Gamma_{\theta\theta\phi} &= \Gamma_{\theta\phi\theta} = 0 \\
\Gamma_{\theta\phi\phi} &= -ml^2 \sin\theta \cos\theta \\
\Gamma_{\phi\theta\theta} &= 0 \\
\Gamma_{\phi\theta\phi} &= \Gamma_{\phi\phi\theta} = ml^2 \sin\theta \cos\theta \\
\Gamma_{\phi\phi\phi} &= 0
\end{aligned}
$$

となる。
ポテンシャルは $U = mgz = mglcos\theta$ なので、一般化力は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\theta &= mlg \sin\theta \\
\mathcal{F}_\phi &= 0
\end{aligned}
$$

以上から一般化運動方程式は

$$
\begin{aligned}
ml^2\ddot{\theta} - ml^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 &= mgl \sin\theta \\
ml^2 \sin^2\theta \ddot{\phi} + ml^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}\dot{\phi} &= 0
\end{aligned}
$$

と求まる。

5　疑問点とか

一般化運動方程式では、うまく変数を選べば拘束力を完全に問題から除外する事ができる。
うまく変数を選ぶというのは、自由度を落として、拘束条件が初めから満たされているような変数の取り方である。
もし、振り子のケースで直交座標とすると、拘束条件を外す事ができないので、拘束条件付き微分方程式を解く必要があり、まず解けないし、数値解析も大変。